

Kugelpotential

Es sei $V(x)$ das Newtonsche Volumenpotential einer offenen Kugel $B_R \subset \mathbb{R}^3$ vom Radius $R > 0$ um den Nullpunkt mit der Dichte $\rho(x) = |x|^2$ ($|x|$ bezeichnet die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^3$) im Aufpunkt x , d.h.

$$V(x) = \iiint_{B_R} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

- a) Berechnen Sie $V(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
- b) Für welche $x \in \mathbb{R}^3$ ist $V = V(x)$ zweimal stetig differenzierbar?
- c) Bestätigen Sie durch direktes Nachrechnen mittels a)

$$\Delta V = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R}, \quad \Delta V = -4\pi|x|^2 \quad \text{in} \quad B_R$$